Función Cuadrática (II)

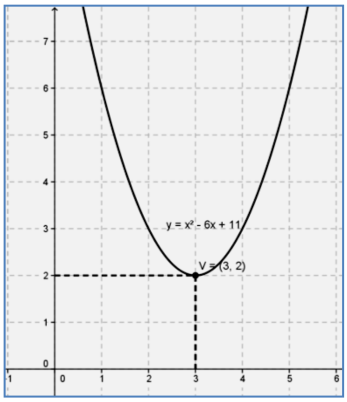
Otras formas de expresar la función cuadrática.

Una función cuadrática puede escribirse en forma polinómica, canónica o factorizada.

Forma Canónica

En dicha expresión intervienen el vértice y el coeficiente cuadrático (a).

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$



Por ejemplo: $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

x_v $\qquad$ y_v

En el gráfico de la función, notarás que la abscisa del vértice es……………………….., en cambio en la fórmula aparece………………………….
esto ocurre como consecuencia del signo negativo de la fórmula.
Esto sucede **SIEMPRE** con la abscisa, en cambio la ordenada del vértice mantiene su signo.
En el ejemplo, el coeficiente cuadrático es…………………………………………….
Si se quiere obtener las raíces de la función, sólo debemos igualar a cero la misma y convertirla en una ecuación. $\quad (x - 3)^2 + 2 = 0$

……………………………………………………

…………………………………………………..

…………………………………………………..

Como se ve en la representación gráfica, la función no posee raíces reales (no corta al eje de abscisas).

Esto quiere decir que no necesito pasar a la expresión…………………………………… de la función para hallar las raíces.

Pasaje de forma canónica a forma polinómica

Para pasar de una forma a la otra, solamente debemos operar algebraicamente la expresión, es decir, separar en términos, desarrollar el cuadrado de binomio y reducir al mínimo la expresión.

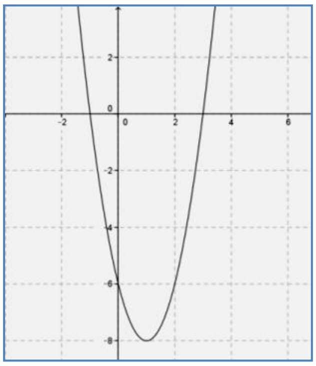
$f(x) = (x - 3)^2 + 2$
…………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………. Forma polinómica

Forma Factorizada

Una función cuadrática puede escribirse en forma factorizada, si posee raíces; en dicha expresión también interviene el coeficiente cuadrático.

Esta es la fórmula:

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$



Ejemplo:

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$

Observa que las raíces de la función son $x_1 = -1 \; y \; x_2 = 3$, pero en la expresión factorizada aparecen con el signo contrario, esto sucede por efecto del signo negativo de la fórmula.

<u>Pasaje de forma factorizada a forma polinómica</u>

Para realizar el pasaje debe aplicarse la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………….. Forma polinómica

<u>DISCRIMINANTE</u>

Ya hemos visto, al calcular las raíces de una función, que pueden suceder tres casos:

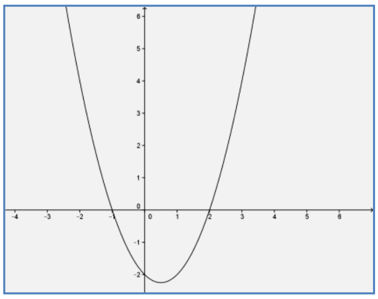
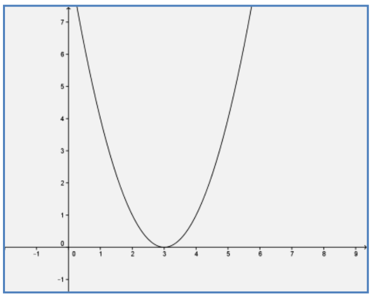
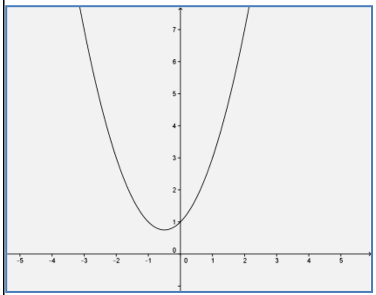
a) que la parábola corte al eje de abscisas…………………………………………………….
b) que la parábola corte al eje de abscisas…………………………………………………….
c) que la parábola……………. corte al eje de abscisas.

El discriminante es la expresión algebraica que permite conocer el tipo de soluciones que posee una ecuación de segundo grado; sin necesidad de conocer el valor de las mismas. Se simboliza con la letra griega delta mayúscula.

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Observar que se trata de la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada, en la fórmula resolvente, en la que intervienen los tres parámetros de la forma polinómica de la función.

Vamos a establecer las tres situaciones que pueden presentarse, según el signo de dicho número.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
 ***La ecuación tiene dos raíces reales distintas.***	 ***La ecuación tiene una raíz real, llamada raíz doble.***	 ***La ecuación no tiene raíces reales.***
La función corta en dos puntos el eje de abscisas.	***La función toca en un solo punto el eje de abscisas.***	***La función no toca el eje de abscisas.***

TRABAJO PRÁCTICO N°4

1) Hallar las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas y escribe luego su forma canónica.

$a)\ f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ $\quad b)\ f(x) = -x^2 + 5x$ $\quad c)\ f(x) = 4x^2 - 9$

$d)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ $\quad e)\ f(x) = -2(x+1)(x-3)$ $\quad f)\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 3$

2) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.
   a) El punto $P = (-1; 1)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$
   b) El vértice de la función cuadrática $f(x) = \frac{2}{5}(x-3)^2 - 2$ es el punto $(3;\ -2)$
   c) La forma factorizada de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ está dada por $f(x) = (x-1)(x-\frac{1}{3})$

3) De las siguientes funciones expresadas en forma factorizada:
   a) Indicar las raíces
   b) Obtener su forma polinómica.

$f_1(x) = (x-2)(x+4)$ $\quad f_2(x) = 2(x-1)(x-3)$ $\quad f_3(x) = (x+5)^2$ $\quad f_4(x) = x(x-3)$

4) De las siguientes funciones expresadas en forma canónica:
   a) Indicar el vértice de cada función
   b) Hacer el pasaje a forma polinómica.

$f_1(x) = (x+2)^2 - 16$ $\quad f_2(x) = 2(x-3)^2 - 2$ $\quad f_3(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

5) Completar la tabla.

Forma polinómica	***Forma factorizada***	***Forma canónica***
$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-12$		
	$g(x)=3(x-2)(x-1)$	
		$h(x)=3(x+2)^2-3$
		$k(x)=(x+1)^2$

6) a) Escribir la forma factorizada de la función $y=2(x-1)^2-8$ sin hallar previamente la forma polinómica.
b) Escribir la forma polinómica de la función hallada en el inciso anterior.

7) Hallar la forma canónica de la función cuyas raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 0$, cuya gráfica pasa por el punto (2; -6).

8) Determinar la ecuación de la función cuadrática empleando la forma más conveniente, en cada caso.
   a) El coeficiente cuadrático es -2 y el vértice es (-3; 4)
   b) El coeficiente cuadrático es 2, corta al eje de ordenadas en 9 y pasa por el punto (-1; 3)
   c) El vértice es $V=(2;3)$ y pasa por el punto (4; -7)
   d) El coeficiente cuadrático es -1, el eje de simetría es x = 2 y la ordenada al origen es 5.
   e) Las raíces son -4 y 6; y a = -1/3.
   f) Tiene por vértice de su parábola asociada $V=(-1;5)$ y una de sus raíces es x = 4
   g) $|a|=3,\ C^-=(-\infty;-4)\cup(1;\infty)\ y\ C^+=(-4;1)$

9) Indicar el tipo de raíces de las funciones, utilizando el discriminante.

$a)\ y=x^2+13x+12$ $\qquad b)\ y=x(x+2)-5$ $\qquad c)\ f(x)=(2x-3)^2$

10) Hallar, si existe, $k\in\mathbb{R}$ para que se cumpla la condición solicitada en cada caso:
   a) La función $f(x)=-x^2+x-k$ tiene una raíz doble.
   b) La ecuación $3x^2+k=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.
   c) El gráfico de la función $g(x)=-kx^2+1$ interseca al eje de las abscisas en dos puntos.
   d) El gráfico de las funciones de la forma $f(x)=-x^2-kx-5$ tiene contacto con el eje x, pero no lo atraviesa.

11) Escribir la expresión de una función cuadrática, para cada inciso, que cumpla los requisitos:

   a) V = (1; 2) y contiene al punto (2; -5)
   b) V = (2; 7) y la ordenada al origen es y = -3

c) Su gráfica interseca al eje y en 2 y al eje x en 5. Además x = 1 es raíz de la función.

12) Hallar la fórmula de la función cuadrática en forma canónica, si se sabe que el punto (0; 4) pertenece a la gráfica de dicha función y que, además la abscisa del vértice es 3 y el coeficiente cuadrático es -1/2.

13) Responder:

a) La abscisa del vértice de la parábola correspondiente a la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ es 1.
¿Cuáles son las raíces de f?

b) Se sabe que el eje de simetría de una función cuadrática f es x = 3, y que una de sus raíces es 9/2. ¿Para qué valores de x se tiene que f(x)=0?

c) Una de las raíces de la función $g(x) = k(x+5)^2 - 6$ es 2. ¿Cuál es el valor de k? ¿Cuál es el valor de la otra raíz?

d) ¿Cuál es la fórmula de la función cuadrática, si el punto (0; 4) pertenece a la gráfica de dicha función y que, además la abscisa del vértice es 3 y a = -1

Clave de respuestas

Ejercicio 1)	***Ejercicio 2)***	***Ejercicio 3)***	***Ejercicio 4)***	***Ejercicio 5)***
a) V (1; -4)	a) F	$f_1(x) = x^2 + 2x - 8$	$f_1(x) = x^2 + 4x - 12$	$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x+6)$ $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{25}{2}$
b) V (5/2; 25/4)	b) V	$f_2(x) = 2x^2 - 8x + 6$	$f_2(x) = 2x^2 - 12x + 16$	$g(x) = 3x^2 - 9x + 6$ $g(x) = 3(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$
c) V (0;-9)	c)F	$f_3(x) = x^2 - 3x$	$f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$	$h(x) = 3x^2 + 12x + 9$ $h(x) = 3(x+1)(x+3)$
d) V (-1; 9/4)				$k(x) = x^2 + 2x + 1$ $k(x) = (x+1)^2$
e) V (1; 8)				
f) V (-1; -3)				

Ejercicio 6)

$y = 2(x-3)(x+1)$

$y = 2x^2 - 4x - 6$

Ejercicio 7)

$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

Ejercicio 8)

$a)\ y = -2(x+3)^2 + 4$

$b)\ y = 2x^2 + 8x + 9$

$c)\ y = -\frac{5}{2}(x-2)^2 + 3$

$d)\ y = -x^2 + 4x + 5$

$e)\ y = -\frac{1}{3}(x+4)(x-6)$

$f)\ y = -\frac{1}{5}(x+1)^2 + 5$

$g)\ y = -3(x+4)(x-1)$

Ejercicio 9)

$a)$ *Dos raíces* $\mathbb{R}$

$b)$ *Dos raíces* $\mathbb{R}$

$c)$ *Una raíz doble*

Ejercicio 10)

$a)\ k = \frac{1}{4}$

$b)\ k \in (0; \infty)$

$c)\ k \in (0; \infty)$

$d)\ k_1 = 2\sqrt{5}$ v $k_2 = -2\sqrt{5}$